Департамент образования Ивановской области
областное государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Шуйский технологический колледж»
155901 г. Шуя, Ивановская обл., Учебный городок, 1
(49351) 4-70-81 www.prof4.ru liceyshuya@mail.ru

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по математическому и общему естественнонаучному циклу
ЕН.01 МАТЕМАТИКА

по специальности
35.02.07 Механизация сельского хозяйства

г. Шуя

Пояснительная записка

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

Зачет по каждой практической работе студент получает после её выполнения и предоставления в печатном или электронном виде, оформления отчета в котором указывает полученные знания и умения в ходе выполнения практической работы, а также ответов на вопросы преподавателя, если таковые возникнут при проверке выполненного задания.

Содержание

Практическая работа №1

Тема: Предел последовательности и предел функции.

Цель: сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций.

Теоретические сведения к практической работе

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n \in R : n \geq 1\}$.

Число а называется пределом последовательности

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$$
$$\forall n > n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 6n - 5}{10n^3 - 8n^2 + 2}$

Решение $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 6n - 5}{10n^3 - 8n^2 + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1 + \frac{6}{n^2} - \frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(10 - \frac{8}{n} + \frac{2}{n^3}\right)} = \frac{1}{10}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{12n^3 + 4n^2 - 1}$$

Пример 2. Вычислить предел

Решение $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{12n^3 + 4n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(12 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0}{12} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 6}{7n - 8}$$

Пример 3. Вычислить предел

Решение $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 6}{7n - 8} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1 + \frac{6}{n^2})}{n^2(\frac{7}{n} - \frac{8}{n^2})} = \frac{1}{0} = \infty$

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8} - \sqrt{n-1}\right)$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{2n+8}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+8)-(n-1)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+8-n+1}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+9}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x\to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$, зависящее от , такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ (c=const).

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$, то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}=\frac{A}{B},\quad (B\neq 0).$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке x=x_0. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c = \text{const}$, $c \neq 0$, $c \neq \infty$, то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$$\frac{0}{c} \to 0;\quad \frac{c}{0} \to \infty;\quad \frac{\infty}{c} \to \infty;\ c\cdot\infty \to \infty;\ c\cdot 0 \to 0;\quad a^{\infty} \to 0, \text{если } 0 < a < 1;\ a^{\infty} \to \infty, \text{если } a>1.$$

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\quad \left(\frac{0}{0}\right);\quad (0\cdot\infty);\quad (\infty-\infty);\ (1^{\infty});\ (\infty^{0});\ (0^{0}).$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2\cdot 1^3+15}{10\cdot 1^2-4} = \frac{2+15}{10-4} = \frac{17}{6}$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 4}\frac{(x+4)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 4}\frac{(4+4)}{(4-1)} = \frac{8}{3}$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}$

Решение

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}\right)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{\left(\left(\sqrt{2x+8}\right)^2-\left(\sqrt{23-x}\right)^2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{\left((2x+8)-(23-x)\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{(3x-15)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{3}{\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)} =$$

$$= \frac{3}{\left(\sqrt{2\cdot 5+8}+\sqrt{23-5}\right)} = \frac{3}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{18}\right)} = \frac{3}{2\sqrt{18}} = \frac{3}{2\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1\cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить пределы последовательностей:

$1)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+5}$ $2)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-2n}{n+6}$ $3)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n+3}{1+2n}$

$4)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+16}{9n}$ $5)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$ $6)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n-1)^2-(n+1)^2}$

$7)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$ $8)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+16n}$ $9)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n-7}-\sqrt{n+2}\right)$

Задание 2. Вычислить пределы функций:

$1)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}$ $2)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+x}$ $3)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$

$4)\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}$ $5)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ $6)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$

$7)\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$ $8)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}$ $9)\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$

Практическая работа №2

Тема: Производная функции.

Цель: сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций.

Теоретические сведения к практической работе

Производной функции $y=f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y'=f'=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0:

$$f'(x_0),\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0},\quad \frac{df(x_0)}{dx},\ \left.y'_x\right|_{x_0},\ y'(x_0)\ \text{и другие.}$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y = f[u(x)]$, $y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	**VII**	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $c = \text{const}$		
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $(v(x) \neq 0)$	**VIII**	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, $(y'_x \neq 0)$.
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2}$, $c = \text{const}$ $(v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция		
1	$C' = 0$	**9**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	**10**	$(\text{tg}\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

3	$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$		**11**	$(\mathrm{ctg}u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$		**12**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$		**13**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$
6	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $(u > 0)$		**14**	$(\mathrm{arctg}u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u > 0)$		**15**	$(\mathrm{arcctg}u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$			

Пример 1. Найти производные функций:

$$а)\ y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3};\ б)\ s = (e^t - 2\ln t)\sin t;\ в)\ u = \mathrm{ctg}^3 \frac{v}{3};\ г)\ z = \frac{\mathrm{arctg} 2t}{1+4t^2}.$$

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$

$$= 3 \cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t=1, получим:

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)'\sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' =$$

$$((e^t)' - 2(\ln t)')\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right)\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v, т. е. v=1; используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right] = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)' = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) =$$

$$= 2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что t=1, получим:

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg}2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Пример 2. Найти производную y'_x, если функция задана параметрически: $\begin{cases} x = \ln(5-2t) \\ y = \operatorname{arctg}(5-2t). \end{cases}$

Используем правило VII $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$\begin{cases} x'_t = \dfrac{(5-2t)'}{5-2t} = \dfrac{-2}{5-2t} \\ y'_t = \dfrac{(5-2t)'}{1+(5-2t)^2} = \dfrac{-2}{1+(5-2t)^2}. \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{-2}{1+(5-2t)^2} : \frac{-2}{5-2t} = \frac{5-2t}{1+(5-2t)^2} = \frac{5-2t}{4t^2-20t+26}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = x^x$ логарифмическим дифференцированием

$$y = x^x$$
$$\ln y = \ln x^x$$
$$\ln y = x \cdot \ln x$$
$$\left(\ln y\right)' = \left(x \cdot \ln x\right)'$$
$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$
$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$
$$y' = y\left(\ln x + 1\right)$$
$$y' = x^x \cdot \left(\ln x + 1\right)$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

1) $а)\, y = 3x^3 - \dfrac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$; $б)\, s = (1+t^2)(2 - 3\operatorname{arcctg} t)$; $в)\, u = \ln^3 \dfrac{V}{2}$; $г)\, z = \dfrac{5 - \sin 3t}{e^{4t}}$.

2) $а)\, y = 5x - \dfrac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$; $б)\, s = (4 - 3\ln t)(5 + 2\sin t)$; $в)\, u = \sin^4(2V+3)$; $г)\, z = \dfrac{\sin(2-t)}{2 - \ln 3t}$.

3) $а)\, y = 7x^2 + \dfrac{4}{x^6} - \sqrt[5]{x^2}$; $б)\, s = (3 - \cos t)(5 + 6\sin t)$; $в)\, u = \sqrt[3]{1 - 4V^2}$; $г)\, z = \dfrac{t^3 - e^{3t}}{\arccos 2t}$.

4) $а)\, y = 5x^2 + \dfrac{3}{x^4} - \sqrt[6]{x^7}$; $б)\, s = (3t^3 - 4)(t - 2\cos t)$; $в)\, u = \ln^2(5V-3)$; $г)\, z = \dfrac{\ln(4-5t)}{\sin t}$.

5) $а)\, y = x^5 - \dfrac{2}{x^3} + 2\sqrt[7]{x^5}$; $б)\, s = t^4(4 + \operatorname{arctg} t)$; $в)\, u = \cos^3(3V+1)$; $г)\, z = \dfrac{t - \arcsin 5t}{e^{-t}}$.

6) $а)\, y = x^4 + \dfrac{1}{x} - 2\sqrt[3]{x}$; $б)\, s = (3 + \operatorname{tg} t)(1 - 4\operatorname{ctg} t)$; $в)\, u = tg^4(3V+2)$; $г)\, z = \dfrac{\operatorname{arctg} 2t}{1 + 4t^2}$.

Задание 2. Найти производную y'_x функции y=y(x), заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \cos(2t+6) \\ y = \sin(2t+6) \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = (1-t)^2 \\ y = \cos(t-1) \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \mathrm{tg}t \\ y = t^2 - 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = (1-4t)^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = c\mathrm{tg}t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$

Задание 3. Найти производную функции логарифмическим дифференцированием: 1) $y = (\sin x)^{\cos x}$

2) $y = (\cos x)^x$

3) $y = x^{\ln x}$

4) $y = (\sin x)^{\ln x}$

5) $y = x^{\cos x}$

6) $y = (tgx)^{\ln x}$

Практическая работа №3

Тема: Неопределенный интеграл.

Цель: сформировать умение вычислять неопределенные интегралы, используя непосредственное интегрирования и метод замены переменной.

Теоретические сведения к практической работе

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — const.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx = F(x)+C$, где $F'(x)=f(x)$, C — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx;$

2. $\int dF(x) = F(x)+C;$

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \qquad k$ — const;

4. $\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du = C; \quad C = \text{const};$ 2. $\int du = u + C;$

3. $\int u^{\alpha}du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$ 3a. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$ 5. $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C;$

6. $\int e^{u}du = e^{u} + C;$ 7. $\int \cos u\, du = \sin u + C;$

8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C;$ 9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C;$

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C;$ 11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C;$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$ 13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$

14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C;$ 15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$ 17. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$

18. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5}\right)dx; \qquad б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2} + 3\cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$$

Решение.

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5}\right)dx = \int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} + 2x^{5/6}\right)dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{matrix}\right\} =$$

$$= 5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}} - 3\int\frac{dx}{x} - \int x^{-4}dx + 2\int x^{5/6}dx = \left\{\begin{matrix}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{matrix}\right\} =$$

$$= 5\ln\left|x + \sqrt{x^2+7}\right| - 3\ln|x| - \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1} + C =$$

$$= 5\ln\left|x + \sqrt{x^2+7}\right| - 3\ln|x| + \frac{1}{3x^3} + \frac{12}{11}x^{11/6} + C.$$

Проверка:

$$\left(5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C\right)'=5\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|\right)'-$$

$$-3\left(\ln|x|\right)'+\frac{1}{3}\left(x^{-3}\right)'+\frac{12}{11}\left(x^{11/6}\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{4, 3, 1 таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)'}{x+\sqrt{x^2+7}}-3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}(-3)x^{-3-1}+\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{6}\cdot x^{11/6-1}=5\cdot\frac{1+\frac{\left(x^2+7\right)'}{2\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}=5\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=5\frac{\sqrt{x^2+7}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\text{ — верно.}$$

б) $$\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)}+3\int 5^x dx+$$

$$+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2}+3\int 5^x dx+4\int dx-\int x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов}\end{matrix}\right\}=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+$$

$$+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{1}{2}x^2+C\right)'=\frac{5}{\sqrt{22}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'+$$

$$+\frac{3}{\ln 5}\left(5^x\right)'+4x'-\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы 14, 5, 2, 3, 1}\\ \text{таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{22}}\frac{\left(\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'}{1+\frac{11}{2}x^2}+\frac{3}{\ln 5}\cdot 5^x\ln 5+4\cdot 1-\frac{1}{2}2x^{2-1}=\frac{5}{\sqrt{22}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{\frac{2+11x^2}{2}}+$$

$$+3\cdot 5^x+4-x=\frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}}\frac{\sqrt{11}\cdot 2}{\sqrt{2}\left(2+11x^2\right)}+3\cdot 5^x+\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}=$$

$$=\frac{5}{2+11x^2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\ \text{— верно.}$$

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

а) $\int\cos 4x dx$; *б)* $\int e^{9x+1}dx$; *в)* $\int x(2-x^2)^5dx$

Решение:

$$a)\ \int \cos 4x dx = \left| \begin{matrix} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{matrix} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1} dx = \left| \begin{matrix} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \dfrac{dt}{9} \end{matrix} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить интегралы.

1) $\int \left(\frac{7}{x^2+16} - \frac{x^4+5}{x^5} + 3\sqrt{x} \right) dx$ $\quad \int \left(\frac{5}{5x^2+5} + 7^x - \frac{\sin 2x}{\cos x} \right) dx$

2) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}} - \frac{2x^2+10}{x} + 4\sqrt[6]{x^5} \right) dx$ $\quad \int \left(\frac{2}{2x^2+2} + 2^x - \frac{x^2-4}{x+2} \right) dx$

3) $\int \left(\frac{2+\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{\sqrt{x^2+3}} + 4e^x \right) dx$ $\quad \int \left(\frac{12}{3+3x^2} - 3\cos x + \frac{x^2-9}{x-3} \right) dx$

4) $\int \left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}} + \frac{6+x^3}{x^4} - 3\sqrt[8]{x^5} \right) dx$ $\quad \int \left(\frac{6}{2x^2+2} - 2\sin x + 3^x \right) dx$

5) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4x^2-1}{x^3} - 2\sqrt[8]{x^3} \right) dx$ $\quad \int \left(\frac{6}{3x^2-9} + \frac{3\sin^3 x - 5}{\sin^2 x} \right) dx$

6) $\int \left(\frac{3\cos^3 x - 2}{\cos^2 x} - 5\sqrt[5]{x^3} \right) dx$ $\quad \int \left(\frac{16}{2x^2-8} - \frac{3-x^3}{x^4} + 5^x \right) dx$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$ $\quad \int \frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$ $\quad \int e^{1-3x} dx$

2) $\int (2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$ $\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$ $\int e^{6x+5}\,dx$

3) $\int 10^{2x+1}\,dx$ $\int \sin\frac{x}{2}\,dx$ $\int \frac{dx}{5x+3}$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10}\,dx$ $\int \cos 2x\,dx$ $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

5) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ $\int \sin 2x\,dx$ $\int 3^{7x-1}\,dx$

6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\int \sin(2-3x)dx$ $\int \frac{dx}{e^{3x}}$

Практическая работа №4

Тема: Вычисление определенного интеграла.

Цель: сформировать умение вычислять определенные интегралы, используя основные свойства и различные методы интегрирования.

Теоретические сведения к практической работе

Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a), \tag{1}$$

где $F(x)$— первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Формула (1) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$ 2) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

$$3)\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx;$$

$$4)\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx;$$

$$5)\int_a^b Cf(x)dx=C\int_a^b f(x)dx,\ C-\mathrm{const};$$

6) Если $f(x)\le g(x)$ для всех $x\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx;$

7) Если $m\le f(x)\le M$ для всех $x\in[a,b]$, то

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dx, \tag{2}$$

где $\alpha=\psi(a),\ \beta=\psi(b),\ t=\psi(x)$ — обратная к $x=\varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (1) приобретает вид:

$$\int_a^b UdV=UV\Big|_a^b-\int_a^b VdU, \tag{3}$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3\left(x^2-16x+3\right)dx$

Решение.

$$\int_1^3 \left(x^2-16x+3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-16\cdot\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_1^3=\left(\frac{x^3}{3}-8x^2+3x\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=\left(\frac{3^3}{3}-8\cdot3^2+3\cdot3\right)-\left(\frac{1^3}{3}-8\cdot1^2+3\cdot1\right)=\left(\frac{27}{3}-72+9\right)-\left(\frac{1}{3}-8+3\right)=$$

$$=(9-63)-\left(\frac{1}{3}-5\right)=-54-\frac{1}{3}+5=-49-\frac{1}{3}=-49\frac{1}{3}$$

Содержание практической работы

Задание: Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_1^2 \left(x^3+10x\right)dx$ 2) $\int_{-2}^3 \left(3x^2+6x-2\right)dx$

3) $\int_1^3 \left(x^2-16x+3\right)dx$ 4) $\int_0^8 \left(21x-19\right)dx$

5) $\int_{-4}^0 \left(x^3+8\right)dx$ 6) $\int_{10}^{13} \left(2x+7\right)dx$

Практическая работа №5

Тема: Применение определенного интеграла для вычисления площади фигур.

Цель: сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площади фигур.

Теоретические сведения к практической работе

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, где $f_2(x)\ge f_1(x)$ для всех $x\in[a,b]$, и прямыми $x=a$, $x=b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \qquad (1)$$

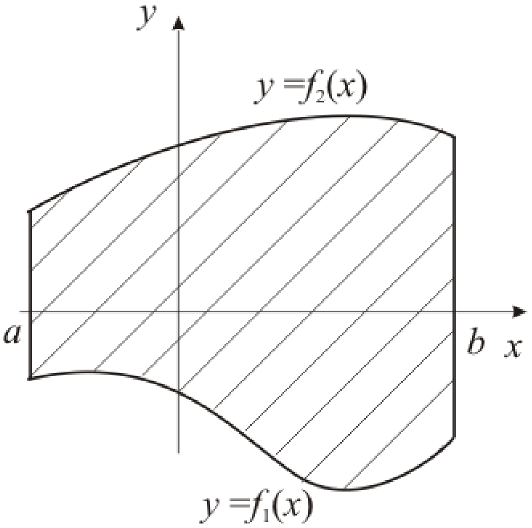

Рис. 1

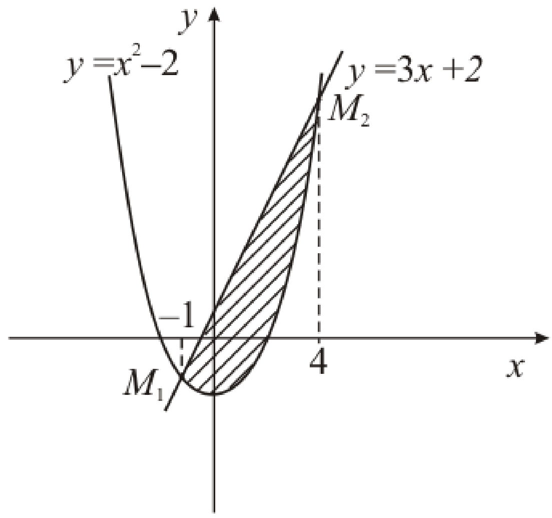

Рис. 2

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2,\ y = 3x + 2.$

*Решение***.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

X	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
Y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0,\,2)$ и $(-1,\,-1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3\cdot(-1) + 2 = -1,\ \ y_2 = 3\cdot 4 + 2 = 14$. Итак, $M_1(-1,-1),\ \ M_2(4,14)$.

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (1), в которой

$f_2(x) = 3x + 2,\ f_1(x) = x^2 - 2,$ поскольку $f_2(x) \ge f_1(x)$ для всех $x \in [-1,4]$.

Получим:

$$S=\int_{-1}^{4}\left(3x+2-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int_{-1}^{4}\left(3x-x^2+4\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{3\cdot4^2}{2}-\frac{4^3}{3}+4\cdot4-\left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+4\cdot(-1)\right)=24-\frac{64}{3}+16-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+4=$$

$$=44-\frac{65}{3}-\frac{3}{2}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции $y=y(t)$ и $x=x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t\in[t_0,t_1]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $t\in[t_0,t_1]$, прямыми $x = a$, $x = b$, где $a =$

$x(t_0)$,

$b = x(t_1)$, и осью OX, вычисляется по формуле:

$$S=\left|\int_{t_0}^{t_1}y(t)x'(t)dt\right|. \qquad (2)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:

$x=2\cos t,\ y=3\sin t,\ 0\le t\le 2\pi.$

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (x, y) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра t, $0\le t\le 2\pi$.

T	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
X	2	0	–2	0	2
Y	0	3	0	–3	0

Нанесем точки (x, y) на координатную плоскость XOY и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка (x, y) описывает эллипс (известно, что $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями a и b). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей OX и OY, найдем её площадь S, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции AOB. Согласно формуле (2) получим:

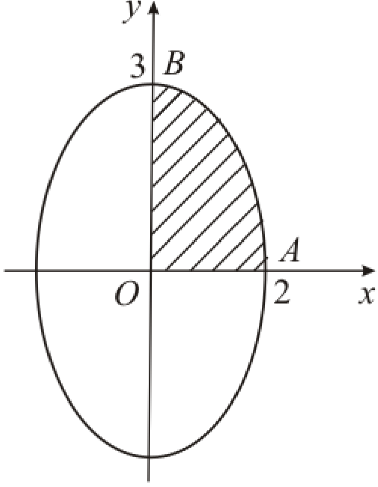

Рис. 3

$$S = 4\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\left(2\cos t\right)' dt\right| = 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt\right| = \left\{\begin{matrix} \text{используем формулу} \\ \text{понижения степени} \\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right)dt\right| = 4\left|-3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 2t\right)dt\right| = 4\left|-3\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right| =$$

$$= 4\left|-3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right)\right| = 4\left|-3\frac{\pi}{2}\right| = 6\pi \approx 18{,}850\ (\text{кв. ед.}).$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2 - 2,\ y = 1 - 2x$

2) $y = x^3,\quad y = 8,\quad x = 0$

3) $y = 3x^2 + 1,\quad y = 3x + 6$

4) $y = x^2,\ y = x + 1$

5) $y = x^2,\ y = 2 - x^2$

6) $y = x^2 - 1,\ y = 1 - x$

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

1) $x = 2t - t^2, \quad y = t(t-1), \quad 0 \le t \le 1$

2) $x = t^2 - 1, \quad y = t^3 - t, \quad 0 \le t \le 1$

3) $x = 2\sin t, \quad y = \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

4) $x = \ln t, \quad y = (t-1)(3-t), \quad 1 \le t \le 3$

5) $x = 1 - \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

6) $x = \cos t, \quad y = 1 - \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

Практическая работа №6

Тема: Элементы теории вероятностей.

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей

Теоретические сведения к практической работе

Классическое определение вероятности

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$

$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число P(A), называемое вероятностью события A.

Если события A_1, A_2 … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю P=0.

Вероятность достоверного события равна единице P=1.

Вероятность произвольного случайного события А заключается между 0 и 1: $0<P(A)<1$.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p=\frac{11}{34}$

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p=0,7+0,8-0,7\cdot 0,8=1,5-0,56=0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

Пример 4: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$n_1 = 10$

$m_1 = 4$

$p_1 = \frac{4}{10}$

$n_2 = 10$

$m_2 = 3$

$p_2 = \frac{3}{10}$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные:

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

Содержание практической работы

Задание: Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события А того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Рекомендуемая литература

Основные источники

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. – М.: Образовательно-издательский центр «Академия», 2011
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике. – М: Издательский центр «Академия», 2011
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2009
4. Дадаян А.А. Математика: учеб.- М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005

Дополнительные источники

1. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007
2. Математика и информатика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Виноградов Ю.Н., Гомола А.И., Потапов В.И., Соколова Е.В./ - М.: Издательский центр «Академия», 2009
3. Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образовательных учреждений нач. и сред. образования / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. – М.: Издательский центр «Академия», 2011
4. Спирина М.С. дискретная математика: учеб. – М.: Издательский центр «Академия», 2006
5. Омельченко В.П. Математика. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2006